Eine schwere Wurzelgleichung

$$\sqrt{2x+15}-x=4$$

GRUNDLAGEN:

Quadratwurzeln verschwinden durch Quadrieren, denn $\sqrt{3}^2=3$

Wenn man die Gleichung $\sqrt{x}=2$ quadriert, entsteht $x=4$.
Wenn man jedoch $\sqrt{x}-2=0$ quadriert, entsteht nicht $x-4=0$
sondern $\left(\sqrt{x}-2\right)^2=0$.
Die 2. binomische Formel macht daraus:

$$\sqrt{x}^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot 2+2^2=0$$

also $x-4\sqrt{x}+4=0$

Die Wurzel ist also nicht verschwunden!

Damit also die Wurzel durch Quadrieren verschwindet, muss man sie zuvor isolieren.

Aus $\sqrt{2x+15}-x=4$ muss man also $\sqrt{2x+15}=x+4$ (1) machen.

Dann wird quadriert: $2x+15=(x+4)^2$ (2)

$$2x+15=x^2+8x+16$$

Zusammenfassen und ordnen: $x^2+6x+1=0$

Die Mitternachtsformel liefert: $x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{-6\pm4\sqrt{2}}{2}=-3\pm2\sqrt{2}$

ACHTUNG: Wenn man die Gleichung $-\sqrt{2x+15}=x+4$ (3)
quadriert, kommt man <u>auch</u> auf die Gleichung (2).

Die errechneten Lösungen $x_1=-3+2\sqrt{2}$ und $x_2=-3-2\sqrt{2}$
gehören also zur Gleichung (1) <u>oder</u> zur Gleichung (2).
Das findet man erst über eine Probe heraus!

WISSEN: **Man muss bei einer Wurzelgleichung die Probe machen, weil durch das Quadrieren eine andere, nicht gegebene Gleichung mitgelöst wird.**

Die Probe wird sehr schwer und steht auf der nächsten Seite.

1. Probe: **für** $x_1 = -3 + 2\sqrt{2}$ in $\sqrt{2x+15} = x+4:$

$$\sqrt{2\cdot\left(-3+2\sqrt{2}\right)+15} = -3+2\sqrt{2}+4$$

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}} = 1+2\sqrt{2}$$

Niemand sieht auf Anhieb, dass die komplizierte Doppelwurzel der linken Seite dieselbe Zahl darstellt, wie der deutlich einfachere Term rechts.

Diese extrem schwere Rechnung löst man mit folgendem TRICK:

Man bringt zuerst alles nach links $\underbrace{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}_{a} - \underbrace{\left(1+2\sqrt{2}\right)}_{b} = 0$ (4)

Man soll nun nachweisen, dass der Term der linken Seite tatsächlich den Wert 0 hat.

Lösungsidee:

Er hat die Form (a – b).

Wenn er den Wert 0 hat, dann auch der Term $(a-b)\cdot(a+b)$

Man multipliziert also die Gleichung (4) mit $(a+b)$.

Dann wendet man die 3. binomische Formel an und erhält

$(a-b)\cdot(a+b)=0$ **bzw.** $a^2 - b^2 = 0$

Hier die ausführliche Rechnung: $\underbrace{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}_{a} - \underbrace{\left(1+2\sqrt{2}\right)}_{b} = 0 \quad \Big|\ \cdot(a+b)$

Diese Multiplikation führt zu: $\left[\sqrt{9+4\sqrt{2}} - \left(1+2\sqrt{2}\right)\right]\cdot\left[\sqrt{9+4\sqrt{2}} + \left(1+2\sqrt{2}\right)\right] = 0$

Die **3. binomische Formel** führt zu: $\sqrt{9+4\sqrt{2}}^{\,2} - \left(1+2\sqrt{2}\right)^2 = 0$

Die Wurzel verschwindet durch das Quadrieren, und für die Klammer benötigt man die 1. binomische Formel. Was wird daher aus der linken Seite?

$$\text{Linke Seite} = 9+4\sqrt{2} - \left(1+4\sqrt{2}+8\right) = 9+4\sqrt{2}-9-4\sqrt{2} = 0$$

Da rechts auch Null steht, stimmt die Probe.

$x_1 = -3+2\sqrt{2}$ ist also eine Lösung der gegebenen Gleichung.

---

2. Probe: **für** $x_1 = -3 - 2\sqrt{2}$ in $\sqrt{2x+15} = x+4:$

$$\sqrt{2\cdot\left(-3-2\sqrt{2}\right)+15} = -3-2\sqrt{2}+4$$

$$\sqrt{9-4\sqrt{2}} = 1-2\sqrt{2} \qquad (4)$$

Hier kann man schon aufhören, denn:
Die rechte Seite ist negativ, die rechte Seite kann als Wurzel nicht negativ sein.
Die Aussage (4) ist also falsch: Die Probe stimmt nicht:
$x_1 = -3-2\sqrt{2}$ ist keine Lösung der Gleichung (1).

Ergebnis: Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist $L = \left\{2\sqrt{2}-3\right\}$

Auszug aus dem Text Nr. 12245 der CDs der Webseiten