Bruchgleichungen lösen

Beispiel 1: $\frac{4}{x} = \frac{5}{x-2}$

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$: Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: Für x = 0.

2. Nenner: Für x = 2.

Daher sind 0 und 2 auszuschließen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;2\}$ bzw. $D = \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

$\boxed{\text{2. Schritt: Hauptnenner bestimmen}}$: $HN = x \cdot (x-2)$

In diesem Fall ist der Hauptnenner das Produkt beider Nenner:

$\boxed{\text{3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren}}$

$\frac{4}{x} = \frac{5}{x-2}$ | $\cdot x(x-2)$ und kürzen

$\frac{4}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}(x-2) = \frac{5}{\cancel{x-2}} \cdot x\cancel{(x-2)}$ *Kann ausgelassen werden!*

$4(x-2) = 5x$ Ausmultiplizieren

$4x - 8 = 5x$ | -4x

$-8 = x$ bzw. x = -8

$\boxed{\text{4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?}}$

Die Lösungszahl -8 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L = \{-8\}$

Beispiel 2: $\frac{4}{x+2} + 1 = \frac{x+6}{x+2}$ (1)

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$ $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\boxed{\text{2. Schritt: Hauptnenner bestimmen}}$: $x+2$

$\boxed{\text{3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren}}$

$\frac{4}{x+2} + 1 = \frac{x+6}{x+2}$ | $\cdot(x+2)$ und kürzen

$\frac{4}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)} + 1 \cdot (x+2) = \frac{x+6}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)}$

$4 + x + 2 = x + 6$ d. h. $x + 6 = x + 6$ (2)

Die Endgleichung (2) liefert **für jede Zahl** eine wahre Aussage außer für -2, denn diese Zahl gehört nicht zum Definitionsbereich, kann also nicht eingesetzt werden.

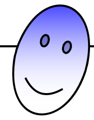
Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ bzw. $\mathbf{L} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (je nach Klassenstufe)

Beispiel 3: $\frac{x-6}{4x-8}+\frac{3}{3x-6}=0$

$\boxed{\text{1. Schritt: Beide Nenner lassen sich durch Ausklammern faktorisieren:}}$

1. Nenner: $4x-8=4\cdot(x-2)$

2. Nenner: $3x-6=3\cdot(x-2)$.



Geänderte Gleichung: $\frac{x-6}{4\cdot(x-2)}+\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}\cdot(x-2)}=0$

Damit werden die nächsten beiden Schritte wesentlich erleichtert.

$\boxed{\text{2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$: Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $4(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

2. Nenner: $x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

Daher ist 2 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$

$\boxed{\text{3. Schritt: Hauptnenner bestimmen}}$ $HN=4\cdot(x-2)$

$\boxed{\text{4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren und kürzen}}$

$$\frac{x-6}{\cancel{4\cdot(x-2)}}\cancel{4\cdot(x-2)}+\frac{1}{\cancel{(x-2)}}\cdot 4\cdot\cancel{(x-2)}=0$$

$$x-6+4=0$$

$$x=2$$

$\boxed{\text{5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?}}$

Die vermeintliche Lösungszahl 2 gehört <u>nicht</u> zum Definitionsbereich der Gleichung. Diese Lösung ist durch die Multiplikation mit dem Term $4(x-2)$ dazu gekommen. Sie ist also keine Lösung der Anfangsgleichung, sondern nur der letzten drei Gleichungen. ***Die gegebene Gleichung hat also keine Lösungszahl***.

Lösungsmenge: $L=\{\ \}$

Dies waren drei relativ einfache Wurzelgleichungen.
Sie werden deutlich komplizierter, wenn x^2 in der Gleichung auftaucht.
Es gibt noch SEHR viele Beispiele und Aufgaben zu allen Schwierigkeitsstufen
in den CDs der Webseiten: