ALGEBRA

Quadratische Gleichungen

Teil 2

Wiederholungsaufgaben
für Vergessliche

Hier ohne quadratische Ergänzung

18 Musterbeispiele
97 Aufgaben
24 Seiten Lösungen

Datei 12221

Stand 5. Juli 2017

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Dieser Text ist eine Sammlung mit vielen quadratischen Gleichungen zum Üben. Nach einigen Musteraufgaben folgt eine Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungen. Hier wird kaum Theorie vermittelt, sondern im Wesentlichen nur geübt.
Auf die Lösungsmethode mit ***quadratischer Ergänzung*** wird hier nicht eingegangen. Diese wird im Text 12230 ausführlich behandelt, und in 12236 gibt es Übungsaufgaben dazu.

Übersicht über die Texte zu quadratischen Gleichungen und ähnlichem

12220	Quadratische Gleichungen 1	Sehr ausführlicher Text (Dieser Text!)
12221	Quadratische Gleichungen	Übungsaufgaben zu 12220 – kompakt!
12222	Quadratische Gleichungen	Lernprogramm!
12223	Quadratische Gleichungen	Textaufgaben
12225	Quadratische Gleichungen	Lernblatt: Das Wichtigste zum Lernen
12226	Quadratische Gleichungen	Quadratische Ergänzung, Übungsaufgaben
12230	Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12240	Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12241	Übungsaufgaben	zu 12240
12245	Wurzelgleichungen 1	
12246	Wurzelgleichungen 2	Übungsaufgaben zu 12245
12260	Gleichungen höheren Grades	
12270	Diverse Gleichungen	Methodentraining
12270	Diverse Gleichungen	Methodentraining

Inhalt:

1 Übersicht über die zu lernenden Methoden

Eine quadratische Gleichung kann man auf diese Form bringen:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Sie heißt die Normalform einer quadratischen Gleichung. a, b und c heißen Koeffizienten.
ax^2 ist der quadratische Summand, bx der lineare Summand, und c heißt das Absolutglied.

Es gibt drei Möglichkeiten, die Lösungen einer quadratischen Gleichung zu bestimmen:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Ich empfehle *nur* die so genannte „**Mitternachtsformel**". Sie eignet sich auch für schwierige Gleichungen!

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

MF

Viele Lehrer verwenden noch die „**p-q-Formel**".
Dazu muss a = 1 sein.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

pq

Und man gibt es noch die umständliche Methode der **quadratischen Ergänzung**.
Daher wird sie in 12230 und 12236 behandelt.

WISSEN:

Es gibt **drei Spezialfälle quadratischer Gleichungen**, in denen man diese Lösungsformeln nicht verwenden sollte, weil es anders sehr viel schneller geht. Diese Fälle sind:

1. Fall: Quadratische Gleichung ohne Absolutglied: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

2. Fall: Die reinquadratische Gleichung: $\boxed{ax^2 + c = 0}$ bzw. $\boxed{x^2 = k}$

3. Fall: Die erweiterte reinquadratische Gleichung: $\boxed{(ax + b)^2 = c}$

Die Lösungsmethoden zu diesen drei Fällen werden ab Seite 12 besprochen

2 Musterbeispiele zu „MN“ und „pq“

1. Musterbeispiel: $\boxed{x^2 - 8x + 7 = 0}$

(a) Lösung mit der Mitternachtsformel:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Zuerst identifiziert man die drei Koeffizienten: a = 1, b = -8, c = 7

Einsetzen in „MN“: $x_{1,2} = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$ (1)

Zusammenfassen und berechnen: $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$

Es gibt somit 2 Lösungen: $x_1 = 7$ und $x_2 = 1$

Anmerkung; Ich schreibe dies gleich so auf: $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$

Lösungsmenge: $L = \{ 1; 7 \}$

b) Lösung mit der „p-q-Formel“:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Zuerst identifiziert man die zwei Koeffizienten: p = -8, q = 7

Einsetzen in „pq“: $x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 7}$

Zusammenfassen und berechnen: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 7} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm \sqrt{9}$

Es gibt somit 2 Lösungen: $x_{1,2} = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$

Lösungsmenge: $L = \{ 1; 7 \}$

So ausführlich wird man die Rechnungen nicht aufschreiben, eher so:

a) „MN“: $\boxed{x^2 - 8x + 7 = 0}$ Den Bruch (1) wird man gleich im Kopf so verrechnen:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

b) „pq“: $\boxed{x^2 - 8x + 7 = 0}$ Auch hier wird man einen Zwischenschritt im Kopf berechnen:

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 7} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

2. Musterbeispiel: $5x^2+9x-2=0$ WICHTIG, da schwerer.

(a) Lösung mit der Mitternachtsformel: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Zuerst identifiziert man die drei Koeffizienten: a = 5, b = 9, c = -2

Einsetzen in „MN“: $x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-4\cdot5\cdot(-2)}}{2\cdot5}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{10}$

Zusammenfassen und berechnen: $x_{1,2}=\frac{-9\pm11}{10}=\begin{cases}\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\\-\frac{20}{10}=-2\end{cases}$

Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{1}{5};-2\right\}$

b) Lösung mit der „p-q-Formel“: $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Weil in $5x^2+9x-2=0$ $a\neq1$ ist, muss man zuerst durch 5 dividieren: $x^2+\frac{9}{5}x-\frac{2}{5}=0$
Ab jetzt muss man bei der pq-Formel mit Brüchen weiterrechnen:

Dann identifiziert man die zwei Koeffizienten: $p=\frac{9}{5}$ und $q=\frac{2}{5}$

Einsetzen in „pq“: $x_{1,2}=-\frac{9}{10}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{2}{5}}$

Hier musste man wissen: $\frac{\frac{9}{5}}{2}=\frac{9}{5\cdot2}=\frac{9}{10}$!

Zusammenfassen: $x_{1,2}=-\frac{9}{10}\pm\sqrt{\frac{81}{100}+\frac{2}{5}}=-\frac{9}{10}\pm\sqrt{\frac{81}{100}+\frac{40}{100}}$

$x_{1,2}=-\frac{9}{10}\pm\sqrt{\frac{121}{100}}=-\frac{9}{10}\pm\frac{11}{10}=\begin{cases}\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\\-\frac{20}{10}=-2\end{cases}$

Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{1}{5};-2\right\}$

Man konnte jetzt sehen, wie aufwändig die p-q-Formel wird, wenn in der quadratischen Gleichung der Koeffizient $a\neq1$ ist. Das Rechnen mit den dann folgenden Brüchen stellt für viele Schüler ein Problem dar. Ganz anders dabei die „Mitternachtsformel“.

Daher zeige ich meinen Schülern die „p-q-Formel“ gar nicht erst. Es gibt noch schlimmere Beispiele zu diesem Thema!

Die Methoden, Beispiele und Aufgaben findet man auf den CDs der Webseiten: