Rechnen mit Quadratwurzeln

(1) **Beim Wurzelziehen macht man Quadrieren von positiven Zahlen rückgängig.**

$3^2 = 9$	also ist	$\sqrt{9} = 3$	$5^2 = 25$	also ist	$\sqrt{25} = 5$
$12^2 = 144$	also ist	$\sqrt{144} = 12$	$0{,}1^2 = 0{,}01$	also ist	$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

Das gilt auch noch für die Zahl 0: $0^2 = 0$ also ist $\sqrt{0} = 0$

Weil Quadrate nicht negative sein können, kann man aus einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen: $\sqrt{-4}$ ist keine reelle Zahl, weil es keine Zahl gibt, deren Quadrat -4 ist.

Wurzeln aus Nicht-Quadratzahlen kann man nur näherungsweise bestimmen:

$\sqrt{5} \approx 2{,}2360879....$ kann man weder als endliche noch als periodische Dezimalzahl darstellen.

Aber eines weiß man über diese Zahl: Ihr Quadrat ist 5: $\sqrt{5}^2 = 5$

Eine Wurzel ist die Zahl, deren Quadrat den Radikanden ergibt: $\sqrt{9{,}7}^2 = 9{,}7$ usw.

(2) **Multiplikation zweier Wurzeln**: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 3} = \sqrt{21}$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$

Man multipliziert dann die Radikanden (das sind die Zahlen unter dem Wurzelzeichen).

Dabei kann folgendes passieren: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

Das Produkt zweier nicht ziehbarer Wurzeln *kann* eine Wurzel sein, die man ziehen kann.

(3) **Umkehrung der Wurzelmultiplikation: Zerlegen einer Wurzel in ein Wurzelprodukt.**

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$ Hier ist folgendes passieret:

Weil $32 = 16 \cdot 2$ ist, kann man $\sqrt{32}$ in das Produkt $\sqrt{16 \cdot 2}$ zerlegen, was ja dasselbe ist wie $\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}$. Weil aber die Zahl 16 eine Quadratzahl ist, kann man wenigstens diese „Teilwurzel“ ziehen: $\sqrt{16} = 4$.

Diese gelb unterlegte Rechnung nennt man „**teilweise die Wurzel ziehen**“.

Merke: Ist der Radikand einer Wurzel durch eine Quadratzahl teilbar, kann man die Wurzel so in ein Produkt zerlegen, dass man teilweise die Wurzel ziehen kann.

$\sqrt{75} = ?$ 75 enthält die Quadratzahl 25 als Faktor. Daher gilt:

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{162} = ?$ 162 hat die Quersumme 9, ist also durch 9 teilbar, also gilt: $\sqrt{162} = \sqrt{9 \cdot 18}$

Da aber 18 nochmals die Quadratzahl 9 als Teiler enthält: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2}$

sieht ganze Rechnung dann so aus:

$$\sqrt{162} = \sqrt{9 \cdot 18} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 2} = \underbrace{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}_{\text{Kann man weglassen}} = 9\sqrt{2}$$

$\sqrt{288} = ?$ 288 ist durch die Quadratzahl 4 teilbar: $\sqrt{288} = \sqrt{4 \cdot 72}$.

72 ist durch die Quadratzahl 36 teilbar: $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2}$. Also rechnet man so:

$$\sqrt{288} = \sqrt{4 \cdot 72} = \sqrt{4 \cdot 36 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \sqrt{2}.$$

Es geht schneller wenn man die Quadratzahl 144 = 12^2 als Teiler entdeckt:

$$\sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \sqrt{2}$$

Das teilweise Ziehen einer Wurzel wird in der Regel immer dann angewendet, wenn man damit eine Vereinfachung erzielen kann:

a) Beim Multiplizieren zweier Wurzeln:

$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{15\cdot 24}=\sqrt{360}=\sqrt{36\cdot 10}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{10}=6\cdot\sqrt{10}$$

Diese Rechnung ist schlecht gemacht, denn dir Multiplikation $15\cdot 24$ führt zu einer großen Zahl und ist aufwändig. Besser ist es, gleich beide Faktoren in geeignete Produkte zu zerlegen:

$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{(5\cdot\underbrace{3)\cdot(3}_{\to 3}\cdot 8)}=\boxed{3}\cdot\sqrt{40}=3\cdot\sqrt{4\cdot 10}=3\cdot 2\cdot\sqrt{10}=6\cdot\sqrt{10}$$

Zusammengefasst und kürzer dargestellt:

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{15}\cdot\sqrt{24}&=\sqrt{(5\cdot\underbrace{3)\cdot(3}_{\to 3}\cdot\underbrace{4}_{\to 2}\cdot 2)}\\&=3\cdot 2\cdot\sqrt{5\cdot 2}=6\cdot\sqrt{10}\end{aligned}}$$

b) **Zusammenfassen spezieller Wurzeln:** (Sie haben einen gemeinsamen „Wurzelkern“.)

$$\begin{aligned}&4\sqrt{27}+5\sqrt{75}-8\sqrt{48}=\\&4\sqrt{9\cdot 3}+5\sqrt{25\cdot 3}-8\sqrt{16\cdot 3}=\\&4\cdot 3\cdot\sqrt{3}+5\cdot 5\cdot\sqrt{3}-8\cdot 4\cdot\sqrt{3}=\\&\underbrace{(12+25-32)}\cdot\sqrt{3}=5\cdot\sqrt{3}\end{aligned}$$

(4) Mit **Wurzeln dividieren**: $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{24}{8}}=\sqrt{3}$ $\quad\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{48}{12}}=\sqrt{4}=2$

Meistens geht das nicht so schön auf. Man kann dann aber **den Nenner rational machen**:

$\frac{12}{\sqrt{3}}$ erweitert man mit $\sqrt{3}$: $\frac{12\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{12\cdot\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$, denn $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$!

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$ Hier reicht es, mit $\sqrt{2}$ zu erweitern, um im Nenner auf eine Quadratzahl zu kommen:

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{10}}$$

Schwer ist diese Aufgabe: $\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ Hier muss man mit $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ erweitern. Denn dann kann man im Nenner die dritte binomische Formel anwenden: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\frac{12\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{12\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{12\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{12\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}=6\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

denn $\sqrt{5}^2=5$ und $\sqrt{3}^2=3$

100 Übungen dazu auf den CDs dieser Webseiten: